PROBLEMAS DE POSICIONES RELATIVAS

1.- Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto (1, 0, 2) y se apoya en las rectas:

r = $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ s = $\frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$

2.- Estudiar para los diferentes valores de a la posición relativa de los siguientes planos:

$\pi_1 \equiv ax + y + z = 1$
$\pi_2 \equiv x + ay + z = 1$
$\pi_3 \equiv x + y + az = 1$

3.- Estudiar las posiciones relativas del plano $\boldsymbol{\pi \equiv x + ay - z = 1}$ y la recta

$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}}$ **según los valores del parámetro a**.

4.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de la recta r = $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ **con el plano $\boldsymbol{\pi \equiv x - 2y + 5z + 1 = 0}$ y es paralelo a las rectas:** s = $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ y t = $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{-2}$

5.- Hallar el valor de los parámetros a y b para que la recta r = $\frac{x}{a} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$ **sea coincidente con el plano $\boldsymbol{\pi \equiv 2x - 3y + z + b = 0}$:**

6**.- Calcula los valores de los parámetros a y b para que los planos:**

$\boldsymbol{\pi_1 \equiv x + by + z - 1 = 0}$, $\boldsymbol{\pi_2 \equiv 2x + ay - z + b = 0}$, $\boldsymbol{\pi_3 \equiv x - y + z + a = 0}$ **pasen por una misma recta.**

7.-**Determinar b para que la recta** r = $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{b} = \frac{z}{6}$ **no corte el plano** $\boldsymbol{\pi \equiv 2x - 4y + 5z = 6}$

8.- Hallar los valores de m y n para que sean paralelas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

9.- Calcular el valor de k para que las rectas r y s se corten en un punto. Encontrar ese punto.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{5} \qquad s \equiv \begin{cases} x + 2y + z = k \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1.- Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto (1, 0, 2) y se apoya en las rectas:

r = $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$ s = $\frac{x+1}{6}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$

sol:

Obtenemos un punto genérico de la recta r.

$$\frac{x}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1} \qquad \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad P\left(3\lambda, -2+\lambda, \lambda\right)$$

Obtenemos un punto genérico de la recta s.

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1} \qquad \begin{cases} x = -1+6\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad Q\left(-1+6\mu, -2\mu, \mu\right)$$

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por P y Q.

$$\frac{x-3\lambda}{-1+6\mu-3\lambda}=\frac{y+2-\lambda}{-2\mu+2-\lambda}=\frac{z-\lambda}{\mu-\lambda}$$

Como la recta pasa por el punto (1, 0, 2), tendremos:

$$\frac{1-3\lambda}{-1+6\mu-3\lambda}=\frac{2-\lambda}{-2\mu+2-\lambda}=\frac{2-\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1-3\lambda}{-1+6\mu-3\lambda}=\dfrac{2-\lambda}{-2\mu+2-\lambda} \\ \dfrac{2-\lambda}{-2\mu+2-\lambda}=\dfrac{2-\lambda}{\mu-\lambda} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\lambda\mu-11\mu+4\lambda+2=0 \\ 3\mu-2=0 \end{cases}$$

$$\lambda=\frac{8}{9} \qquad \mu=\frac{2}{3}$$

Sustituimos estos dos valores en la ecuación de la recta:

$$\frac{x-3\cdot\frac{8}{9}}{-1+6\cdot\frac{2}{3}-3\cdot\frac{8}{9}}=\frac{y+2-\frac{8}{9}}{-2\cdot\frac{2}{3}+2-\frac{8}{9}}=\frac{z-\frac{8}{9}}{\frac{2}{3}-\frac{8}{9}}$$

Operamos y simplificamos.

$$\frac{9x-24}{3}=\frac{9y+10}{-2}=\frac{9z-8}{-2}$$

2.- Estudiar para los diferentes valores de a la posición relativa de los siguientes planos:

$\pi_1 \equiv ax + y + z = 1$

$\pi_2 \equiv x + ay + z = 1$

$\pi_3 \equiv x + y + az = 1$

Sol:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

En el determinante de la matriz de los coeficientes sumamos a la primera fila las otras dos y posteriormente sacamos factor común.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

Restamos a cada fila la primera:

$$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

$Si\ \ a \neq -2, a \neq 1$

$r(M) = r(M') = 3$

Los tres planos se cortan en un punto.

$Si\ \ a = 1$

Las tres ecuaciones son idénticas, los tres planos son coincidentes.

$Si\ \ a = -2$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(M') = 3$$

Como no hay ningún par de planos paralelos, los tres planos se cortan dos a dos formando una superficie prismática.

3.- Estudiar las posiciones relativas del plano $\pi \equiv x + ay - z = 1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$ según los valores del parámetro a.

Sol:

resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -a^2 + a + 2 = 0 \qquad a = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$Si \;\; a \neq 2, a \neq -1$

$r(M) = r(M') = 3$

La recta corta al plano en un solo punto.

$Si \;\; a = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad r(M') = 2$$

La recta está contenida en el plano.

Si $a = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(M') = 3$$

La recta es paralela al plano.

4.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de la recta r = $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ **con el plano $\boldsymbol{\pi \equiv x - 2y + 5z + 1 = 0}$ y es paralelo a las rectas:**

s = $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ y t = $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{-2}$

sol:

Las ecuaciones continuas de la recta r se pasan a implícitas, y éstas junto a la ecuación del plano forman un sistema, cuya solución es el punto de intersección.

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ -x - 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 5z + 1 = 0 \end{cases} \qquad x = 1 \quad y = 1 \quad z = 0$$

El plano viene determinado por el punto de intersección y los vectores directores de las rectas paralelas al plano.

$$A(1,1,0) \qquad \vec{u} = (-1,2,1) \qquad \vec{v} = (1,1,-2)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad -5x - y - 3z + 6 = 0$$

5.- Hallar el valor de los parámetros a y b para que la recta r = $\frac{x}{a} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$ **sea coincidente con el plano $\boldsymbol{\pi \equiv 2x - 3y + z + b = 0}$:**

Sol:

Las ecuaciones continuas de la recta r se pasan a implícitas, y éstas junto a la ecuación del plano forman el sistema:

$$\begin{cases} x - ay = 0 \\ y - z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + b = 0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -b \end{pmatrix}$$

Para que la recta sea coincidente con el plano se tiene que cumplir que:

$$r(M) = r(M') = 2$$

Por tanto el determinante de orden 3, de las dos matrices, se anula.

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 2a - 2 = 0 \qquad a = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \qquad b - 1 = 0 \qquad b = 1$$

6**.- Calcula los valores de los parámetros a y b para que los planos:**

$\boldsymbol{\pi_1 \equiv x + by + z - 1 = 0}$, $\boldsymbol{\pi_2 \equiv 2x + ay - z + b = 0}$, $\boldsymbol{\pi_3 \equiv x - y + z + a = 0}$ **pasen por una misma recta.**

Sol:

Para qué los tres planos pasen por una misma recta tiene que ocurrir que: $r(M) = r(M') = 2$.

$$\begin{cases} x + by + z = 1 \\ 2x + ay - z = -b \\ x - y + z = -a \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 2 & a & -1 & -b \\ 1 & -1 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -3b - 3 = 0 \qquad b = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -b \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = 0 \qquad 3a + 3 = 0 \qquad a = -1$$

7.-**Determinar b para que la recta** r = $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{b} = \frac{z}{6}$ **no corte el plano** $\boldsymbol{\pi \equiv 2x - 4y + 5z = 6}$

Sol:

Una recta y un plano no se cortan si son paralelos.

Para que una recta y un plano sean paralelos el producto escalar del vector director de la recta por el vector normal del plano es igual a 0.

$$\vec{u} = (3, b, 6) \qquad \vec{n} = (2, -4, 5)$$

$$\vec{u} \perp \vec{n} \qquad \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(3, b, 6) \cdot (2, -4, 5) = 6 - 4b + 30 = 0 \qquad b = 9$$

8.- Hallar los valores de m y n para que sean paralelas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

Sol:

Si dos rectas son paralelas, sus vectores directores deben ser proporcionales.

$$\frac{4}{m} = \frac{1}{3} = \frac{-1}{n} \qquad m = 12 \qquad n = -3$$

9.- Calcular el valor de k para que las rectas r y s se corten en un punto. Encontrar ese punto.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{5} \qquad s \equiv \begin{cases} x + 2y + z = k \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$$

Sol:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x - 2z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x - 2z = 7 \\ 2x - y - z = -2 \end{cases} \qquad x = \frac{22}{4} \qquad y = \frac{11}{4} \qquad z = \frac{41}{4}$$

$$\frac{22}{4} + 2 \cdot \frac{11}{4} + \frac{41}{4} = k \qquad k = \frac{85}{4}$$